

文章编号: 1000-7598-(2008) 01-0052-06

弹性地基板的分析简化模型

王春玲, 黄 义

(西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055)

摘 要: 将弹性半空间地基受任意竖向荷载作用下的静力位移积分变换解与弹性半空间地基上四边自由矩形板受任意竖向荷载作用的弯曲解析解相结合, 建立了求解板下地基位移的方法。对一些算例进行大量数值计算分析, 得出弹性半空间地基上四边自由矩形板板下地基水平位移和竖向位移的分布规律; 并基于该位移分布规律, 提出地基位移沿深度按一定的函数关系变化的假设, 考虑板下地基水平位移, 利用板地基系统的总势能最小原理, 通过复杂的变分运算, 得出弹性地基板的简化模型。在不考虑板下地基水平位移时, 该模型退化成双参数地基模型, 并给出了求解其上四边自由矩形板的近似边界条件。

关 键 词: 弹性半空间模型; 矩形板; 地基位移; 分布规律; 最小势能原理; 简化模型

中图分类号: TU 31

文献标识码: A

Refined model for analysis of plates on elastic foundations

WANG Chun-ling, HUANG Yi

(School of Science, Xi'an University of Architecture & Technology, Xi'an 710055, China)

Abstract: Combined the integral representations for displacements of semi-infinite elastic foundation subjected to arbitrary vertical dead load with the bending analytic solution of an elastic rectangle plate with four free edges rested on semi-infinite elastic foundation to develop an efficient calculating technique used to resolve the foundation displacements. Based on carrying on a great quantity of numerical calculation analysis of some instances, the displacement distributed regularities are given for the foundation beneath the plate with four free edges rested on semi-infinite elastic foundation along the foundation depth. Based on the distributed disciplinarians of foundations' horizontal displacement and vertical displacement, proposed the assumptions that the foundations' displacements change according to the specified functional relation along the depth. Considered horizontal displacement of the foundation beneath the plate, utilized the plate and foundation system's principle of minimum potential energy, operated by means of the variational principles, and gave out the refined model for plates on elastic foundations. This model is reduced to double-parameter model under not considering the foundations' horizontal displacement beneath the plate. The approximate boundary conditions of plates on this refined model of foundations are given.

Key words: semi-infinite elastic foundation model; rectangular plate; foundation displacements; distributed disciplinarian; principle of minimum potential energy; refined model

1 引 言

符拉索夫 (Vlasov)^[1] 从弹性力学空间问题的基本方程出发, 对于平面尺寸为无限大、竖向为有限或无限深度的弹性地基, 假设其仅发生竖向位移, 且竖向位移按一定的函数关系变化。通过虚位移原理得到的双参数弹性地基模型, 由于它的两个参数具有较明确的物理意义, 其理论体系又较为严密, 所以得到了研究者的特别关注, 它在各种双参数弹

性地基模型中具有很重要的地位, 被认为对分析基础梁、板的动力响应提供了一条重要途径。但是, 不管什么情况下, 都将板下地基中水平位移假设为 0, 即使在板和地基之间无摩擦时, 也是不合适的, 所以 Vlasov 模型的应用也是有条件的, 只有当水平位移远小于竖向位移时, 才能比较真实地描述地基的变形情况。本文将弹性半空间地基受任意竖向荷载作用下的静力位移积分变换解与弹性半空间地基上四边自由矩形板受任意竖向荷载作用的弯曲解析

收稿日期: 2006-07-07

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目 (No. 2006D23)。

作者简介: 王春玲, 女, 1964 年生, 博士研究生, 副教授, 硕士生导师, 主要从事地基和基础结构相互作用研究。E-mail: 513161065@163.com

解相结合, 求出弹性半空间地基上四边自由矩形板下地基水平位移和竖向位移的分布规律, 并基于该位移分布规律, 提出地基位移沿深度按一定的函数关系变化的假设, 考虑板下地基水平位移, 利用板地基系统的总势能最小原理, 通过复杂的变分运算, 得出弹性地基板的简化模型, 在不考虑板下地基水平位移时, 该模型退化成双参数地基模型。同时, 取消了双参数地基模型水平位移为 0 的假设, 从而得到板的内力及板与地基之间接触反力更合理、更精确的分布规律。这对求解复杂结构与地基相互作用问题有重要意义。

2 位移的分布规律及假设

2.1 水平位移与竖向位移的对比

考虑一支承在弹性半空间地基表面, 边长 $a = b = 4$ m、厚度 $h = 0.2$ m 的弹性方薄板的弯曲。假设板与地基之间为光滑接触。地基泊松比 $\nu_s = 0.4$, 弹性模量为 $E_s = 34.3$ MPa。板的泊松比为 $\nu = 0.167$, 弹性模量 $E = 34\ 300$ MPa。板上作用均布载荷 $q = 0.98$ MPa。

采用文献[2]中的方法, 求得地基反力的展开系数 Q_{mn} 后, 结合文献[2]中的式 (30)、式 (13) 和式 (8), 求出地基水平位移 u, v 和竖向位移 w 如下:

$$u = \frac{1}{8\pi^2(\lambda + \mu)\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{mn} \lambda_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(\lambda + \mu)q_1 z - \mu]e^{-q_1 z} [(-1)^m e^{i\xi a} - 1][(-1)^n e^{i\eta b} - 1]e^{-i(\xi x + \eta y)}}{q_1^2 \eta \left[1 - \left(\frac{m\pi}{a\xi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\pi}{b\eta}\right)^2\right]} d\xi d\eta \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{8\pi^2(\lambda + \mu)\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{mn} \lambda_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(\lambda + \mu)q_1 z - \mu]e^{-q_1 z} [(-1)^m e^{i\xi a} - 1][(-1)^n e^{i\eta b} - 1]e^{-i(\xi x + \eta y)}}{q_1^2 \xi \left[1 - \left(\frac{m\pi}{a\xi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\pi}{b\eta}\right)^2\right]} d\xi d\eta \quad (2)$$

$$w = \frac{-1}{8\pi^2(\lambda + \mu)\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{mn} \lambda_{mn} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(\lambda + \mu)q_1 z + \lambda + 2\mu]e^{-q_1 z} [(-1)^m e^{i\xi a} - 1][(-1)^n e^{i\eta b} - 1]e^{-i(\xi x + \eta y)}}{q_1 \xi \eta \left[1 - \left(\frac{m\pi}{a\xi}\right)^2\right] \left[1 - \left(\frac{n\pi}{b\eta}\right)^2\right]} d\xi d\eta \quad (3)$$

式 (1) ~ (3) 中, 未说明符号的含义参见文献[2]。利用式 (1) ~ (3), 结合振荡函数的积分求解方法^[3]和无穷积分的求解技术^[3], 可计算出地基中任意一点 (x, y) 的水平位移与竖向位移。表 1 给出了地基表面个别点的水平位移与竖向位移值。

表 1 地基表面水平位移与竖向位移之比
Table 1 The ratios of horizontal and vertical displacements at upper surface of the foundation

比值	x, y 值				
	$x = 0.5$ m, $y = 1$ m	$x = 1$ m, $y = 1$ m	$x = 0.5$ m, $y = 0.5$ m	$x = 1$ m, $y = 1.5$ m	$x = 1.5$ m, $y = 1.5$ m
w/u	18.822 2	30.448 3	17.749 4	29.966 2	20.751 8

由表 1 可以看出, 地基水平位移小, 而竖向位移大, 竖向位移是水平位移的几十倍。

2.2 水平位移沿地基深度的分布规律

针对该算例, 计算得出地基水平位移沿地基深度的分布, 如图 1 所示。由图可以看出, 板内地基和板外附近地基, 其水平位移沿地基深度的分布规律是基本相同的。进一步分析得出该分布规律可以用函数: $\psi(z) = (-2.559z + 1)e^{-0.538z}$ 来描述, 其误差情况如图 2 所示。

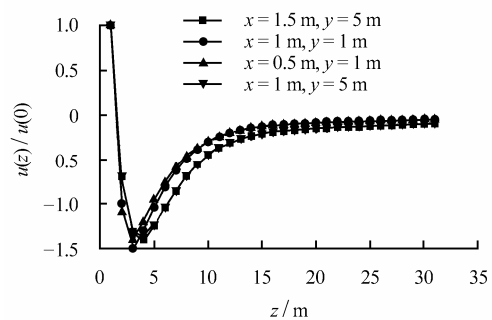


图 1 地基水平位移沿竖向的分布图

Fig.1 Foundation horizontal displacement distributions along the foundation depth

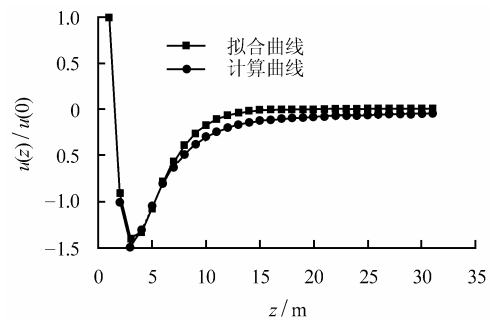


图 2 地基水平位移拟合曲线与计算曲线

Fig.2 Approximate and computable curves of foundation horizontal displacement

2.3 竖向位移沿地基深度的分布规律

类似地可得出该算例地基竖向位移沿其深度的分布,如图3所示。由图可以看出,板内地基和板外地基的竖向位移沿其深度的分布规律是不同的(这与文献[4]的观点相吻合),板外地基的竖向位移沿深度没有一个统一的分布规律,而板内地基的竖向位移沿深度的分布规律是基本相同的。进一步分析得出该分布规律可以用指数函数: $\varphi(z) = e^{-0.130\ 6z}$ 来描述,其误差情况如图4所示。

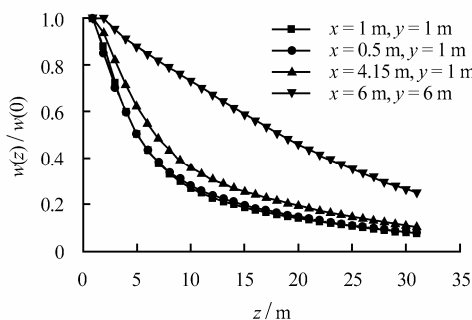


图3 地基竖向位移沿深度的分布图

Fig.3 Foundation vertical displacement distributions along the foundation depth

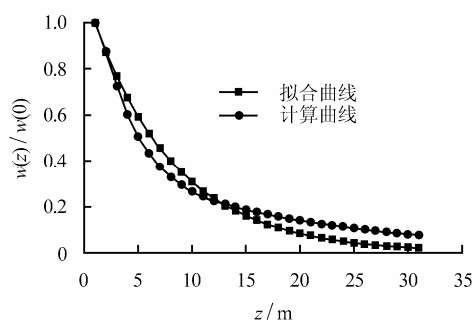


图4 地基竖向位移拟合曲线与计算曲线

Fig.4 Approximate and computable curves of foundation vertical displacement

2.4 拟合参数

通过大量的数值计算分析,发现板内地基其水平位移和竖向位移沿地基深度的分布规律可以分别用函数: $\psi(z) = (\alpha z/b + 1)e^{-\beta z/b}$ 和 $\varphi(z) = e^{-\gamma z/b}$ 来描述,其中 α, β, γ 不仅与板的泊松比 ν 、抗弯刚度 D 、板的边长 a, b 和地基拉梅参数 λ, μ 有关,还与载荷形式有密切关系,详见表2和表3。

因此,可设板下地基中一点的位移满足:

$$u = U(x, y)\psi(z), v = V(x, y)\psi(z), w = W(x, y)\varphi(z) \quad (4)$$

式中: $U(x, y), V(x, y), W(x, y)$ 分别为板下地基表面的水平位移和竖向位移。

假设板和地基之间无摩擦,也就是说地基表面无剪应力,由三维虎克定律知,地基表面剪应变等于0,即

$$\left. \begin{aligned} z=0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将式(4)以及 ψ, φ 代入式(5),得

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{b}{\beta - \alpha} \frac{\partial W}{\partial x} \\ V &= \frac{b}{\beta - \alpha} \frac{\partial W}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

将式(6)代入式(4),得

$$u = \frac{b}{\beta - \alpha} \frac{\partial W}{\partial x} \psi(z) \equiv \eta \frac{\partial W}{\partial x} \psi(z) \quad (7)$$

$$v = \frac{b}{\beta - \alpha} \frac{\partial W}{\partial y} \psi(z) \equiv \eta \frac{\partial W}{\partial y} \psi(z) \quad (8)$$

$$w = W\varphi(z) \quad (9)$$

表2 板受均布载荷作用时的拟合参数 α, β, γ

Table 2 Tabulation of three parameters values for plate with uniformly distributed load

板的长宽比 a/b	板的泊松比 ν	抗弯刚度 $D/\text{kN}\cdot\text{m}$	地基参数 λ/MPa	地基参数 μ/MPa	拟合参数 α	拟合参数 β	拟合参数 γ
1.0	0.167	23 523	49	12.25	-10.236	2.152 4	0.522 4
1.0	0.167	188 180	200	200	-4.126 8	2.224 0	0.604 0
1.5	0.15	20 460	49	12.25	-9.032 4	1.902 8	0.437 2
1.5	0.15	163 680	200	200	-3.753 2	2.068 8	0.492 4

表3 板中心受集中力作用时的拟合参数 α, β, γ

Table 3 Tabulation of three parameters values for concentrated load at plate center

板的长宽比 a/b	板的泊松比 ν	抗弯刚度 $D/\text{kN}\cdot\text{m}$	地基参数 λ/MPa	地基参数 μ/MPa	拟合参数 α	拟合参数 β	拟合参数 γ
1.0	0.167	23 523	49	12.25	-12.740 8	2.904 8	0.596 0
1.0	0.167	188 180	200	200	-5.852 0	3.356 0	0.686 4
1.5	0.15	20 460	49	12.25	-10.494	2.360 4	0.404 0
1.5	0.15	163 680	200	200	-4.642 4	2.636 4	0.439 6

3 简化模型

将式 (7) ~ (9) 代入弹性体变形能表达式, 得板下地基的变形能为

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & 1/2 \iiint_{\Omega_1} \left[\frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} \left\{ W^2 \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + 2\tilde{\nu}\eta \frac{d\varphi}{dz} \psi W \nabla^2 W + \right. \right. \\ & \left. \left. \eta^2 \psi^2 \left((\nabla^2 W)^2 - 2(1-\tilde{\nu}) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) \right\} + \right. \\ & \left. \frac{\tilde{E}}{2(1+\tilde{\nu})} \left[\varphi + \eta \frac{d\psi}{dz} \right]^2 \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy dz = \\ & 1/2 \iint_{\Omega_1} \left[kW^2 + 2\bar{t}W \nabla^2 W + D^* \left((\nabla^2 W)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. 2(1-\tilde{\nu}) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right) + \right. \\ & \left. 2\tilde{t} \left(\left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (10) \end{aligned}$$

式中: $\tilde{E} = \frac{E_s}{1-\nu_s^2}$; $\tilde{\nu} = \frac{\nu_s}{1-\nu_s}$; Ω_1 为板内区域; W 为 Ω_1 上的沉降; H 为地基厚度; 且有:

$$k = \frac{\tilde{E}}{1-\tilde{\nu}^2} \int_0^H \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 dz \quad (11)$$

$$\bar{t} = \frac{\tilde{\nu}\tilde{E}\eta}{1-\tilde{\nu}^2} \int_0^H \psi \frac{d\varphi}{dz} dz \quad (12)$$

$$D^* = \frac{\tilde{E}\eta^2}{1-\tilde{\nu}^2} \int_0^H \psi^2 dz \quad (13)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{E}}{4(1+\tilde{\nu})} \int_0^H \left[\varphi + \eta \frac{d\psi}{dz} \right]^2 dz \quad (14)$$

对于板外地基, 其水平位移比较小, 可以不考虑, 因此板外地基的变形能为

$$\Pi_2 = 1/2 \iint_{\Omega_2} \left[k\bar{W}^2 + 2t \left(\left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (15)$$

式中: Ω_2 为板外区域; $\bar{W}$ 为 Ω_2 上的沉降。

$$t = \frac{\tilde{E}}{4(1+\tilde{\nu})} \int_0^H \varphi^2 dz \quad (16)$$

由弹性薄板理论知薄板的变形能为

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{D}{2} \iint_{\Omega_1} \left\{ (\nabla^2 W)^2 - \right. \\ & \left. 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (17) \end{aligned}$$

板上作用荷载的势能为

$$\Pi_3 = - \iint_{\Omega_1} qW dx dy \quad (18)$$

板地基系统的总势能泛函为

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 \quad (19)$$

对于薄板问题, 令系统的总势能泛函的一阶变分等于 0, 经过复杂的变分运算^[5], 并考虑在无穷远处地基沉降为 0, 可以得到:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} ((D+D^*)\nabla^4 W - 2t^*\nabla^2 W + kW - q(x,y))\delta W dx dy + \\ & \iint_{\Omega_2} (-2t\nabla^2 \bar{W} + k\bar{W})\delta \bar{W} dx dy - \oint_l \left[\frac{\partial}{\partial s} \left(\left(1 + \frac{D^*}{D} \right) M_{ns} \delta W \right) + \right. \\ & \left. \left(\left(1 + \frac{D^*}{D} \right) M_n - \bar{t}W \right) \delta \frac{\partial W}{\partial n} - \left(\left(1 + \frac{D^*}{D} \right) Q_n + \right. \right. \\ & \left. \left. \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + (2\tilde{t} - \bar{t}) \frac{\partial W}{\partial n} \right) \delta W + 2t \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} \delta \bar{W} \right] ds = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} t^* = & \bar{t} + \tilde{t} = \frac{\tilde{\nu}\tilde{E}\eta}{1-\tilde{\nu}^2} \int_0^H \psi \frac{d\varphi}{dz} dz + \\ & \frac{\tilde{E}}{4(1+\tilde{\nu})} \int_0^H \left[\varphi + \eta \frac{d\psi}{dz} \right]^2 dz \quad (21) \end{aligned}$$

式中: l 为区域 Ω_1 的正边界; s, n 分别为 l 的切线和外法线。

在 l 上, 因为内、外位移连续性要求 $\delta W = \delta \bar{W}$, 所以由式 (20) 可以得到:

在 Ω_1 内, 有:

$$(D+D^*)\nabla^4 W - 2t^*\nabla^2 W + kW = q(x,y) \quad (22)$$

在 Ω_2 内, 有:

$$-2t\nabla^2 \bar{W} + k\bar{W} = 0 \quad (23)$$

$$\oint_l \frac{\partial}{\partial s} (M_{ns} \delta W) ds = 0 \quad (24)$$

在 l 上, 有:

$$\left(1 + \frac{D^*}{D} \right) M_n - \bar{t}W = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) Q_n + \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + \\ & (2\tilde{t} - \bar{t}) \frac{\partial W}{\partial n} - 2t \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} = 0 \quad (26) \end{aligned}$$

式 (22) 为考虑板下地基水平位移时, 地基板

的控制方程, 式(23)为板外地基的控制方程; 而式(24)~(26)则为此时地基上自由薄板问题一般形式的边界条件。与双参数地基上矩形板的边值问题^[6]比较, 显然可见, 板外地基的控制方程及边界条件(24)相同, 仅在薄板的控制方程中多了一项 $D^*\nabla^4 W$, 而边界条件式(25)、式(26)有所不同, 但在不考虑板下地基水平位移, 即 $\eta=0$, 由式(11)~(21)显然可见, k 形式不变, $D^*=0$, $t^*=\tilde{t}=t$, $\bar{t}=0$, 该模型退化成双参数地基模型; 考虑板下地基水平位移, 即 $\eta\neq 0$, 那么 $D^*\neq 0$, $t^*\neq \tilde{t}\neq t$, $\bar{t}\neq 0$, 在无限深地基的情况下, 由2.4节中的水平位移和竖向位移沿地基深度的分布规律函数 $\psi(z)$ 和 $\varphi(z)$ 可得

$$D^* = \frac{\tilde{E}\eta^2 b}{2(1-\tilde{\nu}^2)\beta} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \right) = \frac{\tilde{E}b^3}{2\beta(1-\tilde{\nu}^2)(\beta-\alpha)^2} \left(1 + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2} \right) \quad (27)$$

$$k = \frac{\tilde{E}\gamma}{2(1-\tilde{\nu}^2)b} \quad (28)$$

$$t = \frac{\tilde{E}b}{8(1+\tilde{\nu})\gamma} \quad (29)$$

$$\tilde{t} = \frac{\tilde{E}b}{8(1+\tilde{\nu})\gamma} \left(1 + \frac{4\eta\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)}{(\beta+\gamma)^2 b} - \frac{4\eta\gamma}{b} + \frac{\eta^2\gamma(2\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)}{2\beta b^2} \right) = \frac{\tilde{E}b}{8(1+\tilde{\nu})\gamma} \cdot \left(1 + \frac{4\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta+\gamma)^2} + \frac{\gamma(-6\beta^2+6\alpha\beta+\alpha^2)}{2\beta(\beta-\alpha)^2} \right) \quad (30)$$

$$\bar{t} = -\frac{\tilde{E}\tilde{\nu}\eta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\tilde{\nu}^2)(\beta+\gamma)^2} = -\frac{\tilde{E}\tilde{\nu}b\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\tilde{\nu}^2)(\beta+\gamma)^2(\beta-\alpha)} \quad (31)$$

$$t^* = \frac{\tilde{E}b}{8(1+\tilde{\nu})\gamma} \left(1 + \frac{4(1-3\tilde{\nu})\eta\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\tilde{\nu})(\beta+\gamma)^2 b} - \frac{4\eta\gamma}{b} + \frac{\eta^2\gamma(2\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2)}{2\beta b^2} \right) = \frac{\tilde{E}b}{8(1+\tilde{\nu})\gamma} \cdot \left(1 + \frac{4(1-3\tilde{\nu})\gamma^2(\alpha+\beta+\gamma)}{(1-\tilde{\nu})(\beta-\alpha)(\beta+\gamma)^2} + \frac{\gamma(-6\beta^2+6\alpha\beta+\alpha^2)}{2\beta(\beta-\alpha)^2} \right) \quad (32)$$

4 近似边界条件

采用该模型求解地基上的矩形板弯曲问题时需要知道板外地基的沉降形式, 板外地基沉降采用与

Vlazov 相似的假定形式, 即

$$\left. \begin{aligned} x \geq a, 0 \leq y \leq b; \bar{W} &= W(a, y)e^{-\bar{\alpha}(x-a)} \\ x \geq a, y \geq b; \bar{W} &= W(a, b)e^{-\bar{\alpha}(x+y-a-b)} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

注意 $\bar{\alpha}=\sqrt{k/4t}$ 与 Vlazov 假定的衰减指数 $\bar{\alpha}=\sqrt{k/2t}$ 不同。若采用 Vlazov 的衰减指数, 经验算板外地基沉降: $W(a, b)e^{-\bar{\alpha}(x+y-a-b)}$ 不满足板外地基的控制方程: $-2t\nabla^2 \bar{W} + k\bar{W} = 0$ 。

若把假定的板外地基的沉降式(33)代入 Π_4 中, 再对总势能 Π 进行变分运算^[7], 对于本文提出的三参数地基模型上的四边自由矩形薄板可以得出近似的边界条件, 例如(对文献[6]中所示的矩形薄板):

$$x=a; \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) M_x - \bar{t}W = 0 \quad (34)$$

$$\left(1 + \frac{D^*}{D} \right) Q_x + \left(1 + \frac{D^*}{D} \right) \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + (2\tilde{t} - \bar{t}) \frac{\partial W}{\partial x} + 2t\bar{\alpha}W = 0 \quad (35)$$

$$x=a, y=b; 2M_{xy} - 2tW - \frac{t}{\bar{\alpha}} \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) = 0 \quad (36)$$

注意式(34)~(36)与 Vlazov 给出的近似边界条件^[5], 不仅参数 $\bar{\alpha}$ 取值不同, 而且形式上也有所不同, 但与文献[6]中给出的近似边界条件类似, 在不考虑板下地基水平位移时, 除 $\bar{\alpha}$ 取值不同外, 条件式(34)~(36)退化成文献[6]中的近似边界条件形式, 正如文献[6]中所说的那样, Vlazov 给出的近似边界条件是有差错的。

5 结 论

本文将弹性半空间地基受任意竖向荷载作用下的静力积分变换解与弹性半空间地基上四边自由矩形板受任意竖向荷载作用的弯曲解析解相结合, 求出弹性半空间地基上四边自由矩形板板下地基水平位移和竖向位移的分布规律, 并基于该位移分布规律, 提出地基位移沿深度按一定的函数关系变化的假设, 考虑板下地基水平位移, 利用板地基系统的总势能最小原理, 通过复杂的变分运算, 得出弹性地基板的简化模型, 它的推导给出了特征函数(地基反力)的另一重要形式, 即 $p(x, y) = D^*\nabla^4 W - 2t^*\nabla^2 W + kW$ 。

显然, 它结合了海滕尼模型和符拉索夫(Vlazov)模型。从含三参数(D^* , t^* , k)的角度来说, 可以称该模型为三参数模型, 它对求解复杂结构与地基相

相互作用问题有重要意义。

另外,该模型能形式地推广到板和地基之间有摩擦的情况^[8],当然参数 η 不必取成 $b/(\beta-\alpha)$, η 的取值,由经验来定,但这样得到的模型正确与否还有待于进一步研究。

参考文献

- [1] SELVADURAI A P S, 土与基础相互作用的弹性分析[M]. 范文田, 何广汉译. 北京: 中国铁道出版社, 1984.
 - [2] 王春玲, 黄义. 弹性半空间地基上四边自由矩形板的弯曲解析解[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(12): 1 402—1 407.
WANG Chun-ling, HUANG Yi. Analytic solution of plate bending with four free boundaries on semi-infinite elastic foundation[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2005, 27(12): 1 402—1 407.
 - [3] DAVIS P J, RABINOWITZ P. 数值积分方法[M]. 冯振兴, 伍富良译. 北京: 高等教育出版社, 1986.
 - [4] 董军, 彭立生. 双参数地基模型研究及基础梁计算[J]. 武汉水利水电学院学报, 1991, 24(4): 427—438.
 - [5] DONG Jun, PENG Li-sheng. Researches on two-parameter model and foundation beams[J]. **Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering**, 1991, 24(4): 427—438.
 - [6] 寿楠椿. 弹性薄板弯曲[M]. 北京: 高等教育出版社, 1986.
 - [7] 竹学叶, 寿楠椿. 双参数弹性地基板研究综述[J]. 建筑结构, 1994, (11): 28—31.
ZHU Xue-ye, SHOU Nan-chun. A summary of study of plates on a two-parameter foundation model[J]. **Building Structure**, 1994, (11): 28—31.
 - [7] GIRIJA VALLABHAN C V, THOMAS STRAUGHAN W, DAS Y C. Refined model for snalysis of plates on elastic foundations[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1991, 117(12): 2 830—2 844.
 - [8] JONES R. MAZUMDAR J. A note on the behavior of plates on an elastic foundation[J]. **Journal of Applied Mechanics**, 1980, 47: 191—192.
-
- 上接第 51 页
- [2] 吴积善, 康志成, 田连权 等. 云南蒋家沟泥石流观测研究[M]. 北京: 科学出版社, 1980.
 - [3] 康志成, 李焯芬, 马蔼乃, 等. 中国泥石流研究[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
 - [4] 胡明鉴, 汪稔, 张平仓. 斜坡稳定性及降雨条件下激发滑坡的试验研究——以蒋家沟流域滑坡堆积角砾土坡地为例[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(4): 454—457.
HU Ming-jian, WANG Ren, ZHANG Ping-cang. Primary research on the effect of rainfall on landslide-take the slope piled by old landslide in Jiangjiagou valley as example[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2001, 23(4): 454—457.
 - [5] 陈晓清, 崔鹏, 冯自立, 等. 滑坡转化泥石流起动的人工降雨试验研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(1): 106—116.
CHEN Xiao-qing, CUI Peng, FENG Zi-li, et al. Artificial rainfall experimental study on landslide translation to debris flow[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(1): 106—116.
 - [6] 陈宁生, 崔鹏, 王晓颖, 等. 地震作用下泥石流源区砾石土体强度的衰减实验[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(16): 2 743—2 747.
CHEN Ning-sheng, CUI Peng, WANG Xiao-ying, et al. Testing study on strength reduction of gravelly soil in triggering area of debris flow under earthquake[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(16): 2 743—2 747.
 - [7] 闵弘, 魏进兵, 邓建辉, 等. 应变控制式大型室内及现场两用直剪装置: 中国, ZL 2004 2 0057748. 7[P]. 2006-03-01.
 - [8] 郭庆国. 粗粒土的工程特性及应用[M]. 郑州: 黄河水利出版社, 1999.
 - [9] 闵弘, 刘小丽, 魏进兵, 等. 大型现场室内两用直剪仪研制(I): 结构设计[J]. 岩土力学, 2006, 27(1): 164—168.
MIN Hong, LIU Xiao-li, WEI Jin-bing, et al. A new large direct shear apparatus for field and laboratory test(I): configuration[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27 (1): 164—168.
 - [10] 刘小丽, 罗锦添, 闵弘, 等. 现场室内两用大型直剪仪研制(II): 试验测试[J]. 岩土力学, 2006, 27(2): 336—340.
LIU Xiao-li, LOU Jin-tian, MIN Hong, et al. A new large direct shear apparatus for field and laboratory test(II): proof-testing[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(2): 336—340.